A HIPERBOLIKUS PARABOLOID EGY SZÁRMAZTATÁSI LEHETŐSÉGÉRŐL

MISKOLCZI JÓZSEF

Ismert a hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) alábbi előállítási módja:

1. Válasszunk két merőleges síkú és ellentétes tengelyirányú parabolát, és ennek egyikét rögzítsük, s a másikat úgy mozgassuk, hogy síkjának állása és tengelyének iránya változatlan maradjon, csúcspontja pedig a másik parabolát írja le. A mozgó parabola által generált felületet hiperbolikus paraboloidnak nevezzük. Ugyanazon nyeregfelülethez jutunk, ha a két parabola szerepét felcseréljük.

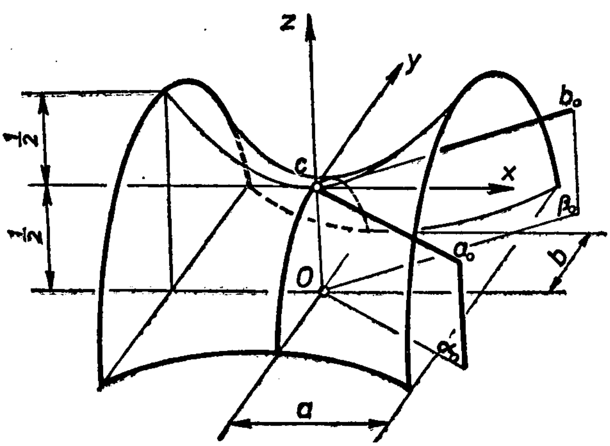
Ha megfelelő koordináta-rendszert választunk, akkor minden hiperbolikus paraboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

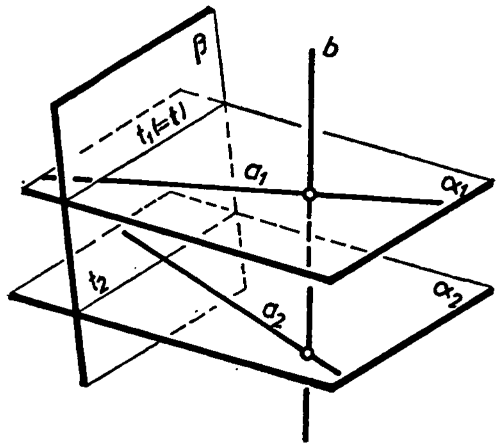
alakú. A rögzített és a mozgatott parabola paramétere $a^2(=p)$ és $b^2(=p')$.

2. Ha adva van az a_1, a_2 kitérő egyenespár és egy ezeket metsző β sík, akkor az a_1, a_2 kitérő egyenesek β síkkal egyező állású tranzverzális egyenesei hiperbolikus paraboloidot alkotnak.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $a_1 \lambda a_2 := a_1$ és a_2 kitérő egyenespár; $b \| \beta := b$ egyenes egyező állású a β síkkal.



1. ábra



2. ábra

Legyen Φ az $a_1 \lambda a_2$ kitérő egyenespárral a fenti módon generált nyeregfelület. Ugyanezen Φ felülethez jutunk el abban az esetben is, ha a b típusú egyenessereg bármely $b_1 \lambda b_2$ párjának az α $(=\alpha_1$ vagy $\|\alpha_1)$ síkkal egyező állású tranzverzális egyenesseregét tekintjük. (Az a_1 és a_2 is ezen sereghez tartozik.) Az „a" és „b" típusú egyenesek alkotják a hiperbolikus paraboloid jól ismert két alkotóseregét, amelyekhez az 1. generálási mód során is eljuthatunk..

Célszerü a későbbiek miatt az alábbi definíciókat megadni: Az α és β síkkal egyező állású síkokat iránysíkoknak nevezzük. Az a_0, b_0 egyenesek a Φ nyeregfelület csúcsalkotói $:= a_0 \,|\, (a_0 \perp t) \wedge (a_0 \| \alpha);\ b_0 \,|\, \perp t) \wedge (b_0 \| \beta)$, ahol $t = \alpha \cap \beta$, és a_0 az „a" seregbeli, b_0 a „b" seregbeli elem. A nyeregfelület csúcsa $:= a_0 \cap b_0 = C$. A nyeregfelület t_0 tengelye $:= t_0 \,|\, (t_0 \| t) \wedge (C \in t_0)$. Az α_0, β_0 érintő síkok $: = \alpha_0 = (a_0 x t_0);\ \beta_0 = (b_0 x t_0)$. Az utolsó definíció szerint tehát a végérintő síkok speciális helyzetű iránysíkok.

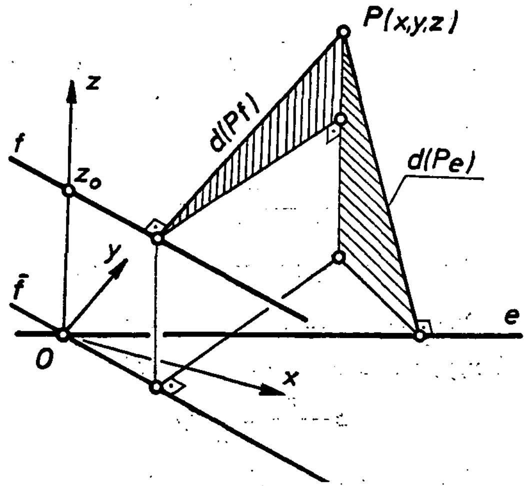
3. Szokás a hiperbolikus paraboloidot páronkénti kitérő három, egy ugyanazon síkkal párhuzamos egyenesek segítségével is származtatni. A nyeregfelületet az említett egyenesek tranzverzális egyenesei generálják. Ez a származtatási mód lényegében nem különbözik a 2. generálási módtól. Ezt akkor használjuk, ha a nyeregfelülethez az egyköpenyü hiperboloid származtatási módjának speciális eseteként akarunk eljutni. Ui. ha páronként kitérő három egyenes nem párhuzamos egy és ugyanazon síkkal, akkor a három egyenes tranzverzális egyenesei egyköpenyü hiperboloidot alkotnak.

A következőkben a hiperbolikus paraboloid egy újabb generálási lehetőségét mutatjuk be. Ez a származtatás analóg azzal, ahogyan ellipszoidot a gömbfelület felhasználásával előállítjuk, vagy ahogy minden el nem fajuló másodrendü felületet — a nyeregfelület kivételével — a megfelelő forgásfelület segítségével generálunk. A generálás ismertetése előtt két tételt bizonyítunk, majd minden hiperbolikus paraboloidhoz hozzárendelünk egy-egy tetraédert.

1. Tétel. Két kitérő egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza olyan hiperbolikus paraboloid, amelynek végérintő síkjai merőlegesek egymásra.

Nevezzük ezt a felületet a két kitérő egyeneshez tartozó hiperbolikus paraboloidnak.

Bizonyítás. Legyen a két kitérő egyenes e és f. Jelölje $d(e\lambda f)$ a két kitérő egyenes távolságát. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a z tengely illeszkedjen e, f egyenesek normáltranzverzálisára, a koordináta-rendszer 0 kezdőpontja az e egyenesre, az x tengely pedig az e, f egyenesek egyik szögfelező síkjára. (3. ábra)



3. ábra

Az ábrán az f egyenesnek az xy síkra vetett merőleges vetületét $\bar{f}$, a z tengellyel való metszéspontját z_0 jelöli. Az xy síkban az m meredekségű e egyenes egyenlete:

$$\frac{y}{\sqrt{m^2+1}}-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x=0,$$

az $\bar{f}$ egyenlete:

$$\frac{y}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x=0$$

alakban írható.

a) Ha egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontra teljesül, hogy $d(Pe)=d(Pf)$, akkor

$$\left(\frac{y}{\sqrt{m^2+1}}-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x\right)^2+z^2=\left(\frac{y}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x\right)^2+(z-z_0)^2 \qquad (1)$$

$$2zz_0-z_0^2=\frac{4m}{m^2+1}xy$$

mivel $d(e\lambda f)>0$, ezért

$$z-\frac{z_0}{2}=\frac{2m}{z_0(m^2+1)}xy. \qquad (2)$$

Így azt kaptuk, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő pontok olyan Φ_s nyeregfelületre illeszkednek, amelyeknek csúcspontja $C(0, 0, \frac{z_0}{2})$, végérintő síkjai: xz és yz, s ezek merőlegesek egymásra.

b) Látható, hogy a (2) egyenletet kielégítő (x, y, z) pontok kielégítik az (1)-et is, azaz egyenlő távolságra vannak az e, f egyenesektől.

2. Tétel. Minden olyan Φ_s nyeregfelülethez, amelynek a végérintő síkjai merőlegesek egymásra, található legalább egy olyan kitérő egyenespár, amelyhez tartozó hiperbolikus paraboloid a Φ_s.

Bizonyítás. Minden olyan hiperbolikus paraboloid, amelynek végérintő síkjai merőlegesek egymásra

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=2z \tag{3}$$

alakú. Forgassuk el a (3) alatti nyeregfelületet a z tengely körül pozitív irányban 45°-kal, majd alkalmazzunk $\frac{1}{2}\overrightarrow{Oz_0}$ vektorú eltolást. A transzformált nyeregfelület egyenlete (az eredeti x, y, z koordináta-rendszerben)

$$z-\frac{z_0}{2}=\frac{1}{2}xy \tag{4}$$

alakú lesz. A (4)-et (2)-vel összevetve adódik, hogy

$$\frac{1}{a^2}=\frac{2m}{z_0(m^2+1)}. \tag{5}$$

Ezt az eredményt és a 2. tétel bizonyítása során alkalmazott gondolatmenetet figyelembe véve azt kaptuk, hogy minden (3) alatti nyeregfelülethez végtelen sok olyan $e\lambda f$ pár található, amely mindegyike hozzátartozik a Φ_s hiperbolikus paraboloidhoz, azaz a kapott kitérő egyenespárok bármelyike generálja Φ_s-t.

Tekintsük az 1. pont alatt megadott generáló parabolákat az 1. ábrán látható helyzetben. Mindkét parabola síkjában a fókuszokon keresztül állítsunk merőleges egyenest a tengelyre. Jelöljük az egyeneseknek a parabolával való metszéspontjait az xz síkban A és B-vel, az yz síkban C és D-vel. Az $ABCD$ pontnégyes egy tetraédert határoz meg, amelyet nevezzük a Φ nyeregfelülethez tartozó tetraédernek.

Legyen $A_1B_1C_1D_1$ a Φ_1, az $A_2B_2C_2D_2$ tetraéder pedig a Φ_2 nyeregfelülethez tartozó tetraéder. Az $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$, $D_1 \to D_2$ kikötésekkel megadott ψ affinitás a Φ_1 felületet leképezi a Φ_2 felületre.

Az eddigiek alapján most már látható, hogy bármely

$$\Phi\colon \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

hiperbolikus paraboloidhoz eljuthatunk úgy is, hogy előbb egy e, f kitérő egyenespárhoz generálunk egy Φ_s típusú felületet, majd ezt a felületet a Φ_s és Φ-hez tartozó tetraéderek által meghatározott affintranszformációval átvisszük Φ-be.

Befejezésül megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy minden Φ_s hasonló egymáshoz. Ebből viszont az következik, hogy minden Φ_s-hez tartozik olyan generáló $e\lambda f$-pár, amelyekben szereplő egyenesek merőlegesek egymásra, s az egyik egyenes az 1. alatt megadott generáló parabolák egyikének a fókuszára, a másik egyenes a másik parabola fókuszára illeszkedik.

IRODALOM

[1] KLUG L.: Projektiv geometria, 1904.
[2] HAJÓS GY.: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1960.
[3] STROMMER GY.: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1971.

ÜBER EINE ERZEUGUNG DES HYPERBOLISCHEN PARABOLOIDS

J. MISKOLCZI

Der Verfasser stellt eine ähnliche Erzeugungsmöglichkeit des hyperbolischen Paraboloids dar, wie das Ellipsoid mit Hilfe der Kugelflache erzeugt wird, oder wie alle nichtausgearteten Flächen zweiter Ordnung — mit Ausnahme der Sattelfläche — mit Hilfe einer entsprechenden Drehungsfläche erzeugt werden.

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

ЙОЖЕФ МИШКОЛЬЦИ

Автор в своей работе указывает на такую генеральную возможность гиперболического параболоида, являющейся аналогичной лой, с помщью которой выводится эллипсоид с использованием вращения поверхности шара или же-как и юбую вырожденную поверхность второй степени — за исключением седловой поверхности — мы генерализуем с помощью соответствующей поверхности вращения.